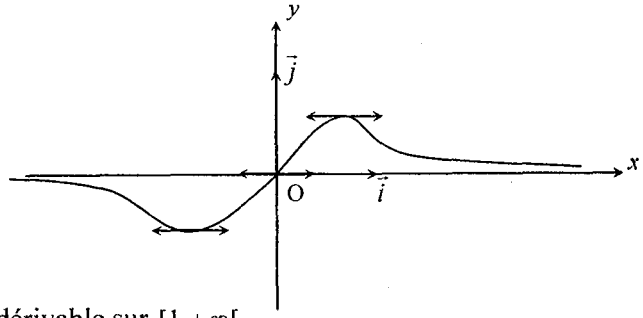

4°/a) F est dérivable sur $[1,+\infty[$

$\forall x \in [1,+\infty[\ ,\ F'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot e^{\frac{1}{x^2}} = f(x)$

• Soit $x \geq 1$; F est continue sur $[x,x+1]$ et dérivable sur $]x,x+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,x+1[$ tel que :

$$F'(c) = \frac{F(x+1)-F(x)}{x+1-x} = F(x+1)-F(x) \Rightarrow f(c) = F(x+1)-F(x)$$

d'autre part on a : $x < c < x+1 \Rightarrow f(x+1) < f(c) < f(x)$ car f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

d'où $f(x+1) \leq F(x+1)-F(x) \leq f(x)$

b) Pour tout entier $k \geq 1$ on a : d'après (*)

$f(k+1) \leq F(k+1)-F(k) \leq f(k)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} F(k+1) - \sum_{k=1}^{n} F(k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)\ ;$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) = f(2)+f(3)+\cdots+f(n+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$$

d'où $\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \sum_{k=2}^{n+1} F(k) - \sum_{k=1}^{n} F(k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$

Or $\sum_{k=2}^{n+1} F(k) - \sum_{k=1}^{n} F(k) = F(n+1) + \sum_{k=2}^{n} F(k) - F(1) - \sum_{k=2}^{n} F(k)$